

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 11-3-2017

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής σε αυτό. (10 μονάδες)

B. Να διατυπώσετε τον κανόνα De L' Hospital για όριο της μορφής $\frac{0}{0}$. (5 μονάδες)

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις

1. Αν f συνεχής στο $[a, \beta]$ τότε το σύνολο τιμών της αντιστοιχεί σε διάστημα.
2. Ισχύει $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, όπου f και g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.
3. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.
4. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ τότε η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.
5. Αν η f είναι ορισμένη στο $[2, 3]$ με $f(2) \cdot f(3) < 0$ τότε παρουσιάζει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(2, 3)$.



En Dynamei
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$.

1. Να αποδειχθεί ότι $x-1 \leq x \ln x$, για $x > 0$.
2. Να εξετάσετε ως προς την συνέχεια την συνάρτηση και να βρείτε το σύνολο τιμών
3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f και την εφαπτομένη για $x=1$.
4. Αν $1 < a < \beta$ αποδείξτε ότι

i) $a^{\beta-1} > \beta^{a-1}$

ii) Υπάρχει μοναδικό $x_0 > 1$ τέτοιο, ώστε $x_0^{\frac{1}{x_0-1}} = e^{\frac{\beta^{a-1}}{\alpha^{\beta-1}}}$

(5x5 μονάδες)



1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίπου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν :

- Η g παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και $-2 < g'(x) \leq -\frac{1}{2}$ και $g(5) = -1$
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2e^{x-a} - x^2$ όπου a πραγματικός αριθμός.
1. Να δείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής το οποίο κινείται πάνω στην $y = -x^2 + 2$
 2. Αν η $f(x)$ παρουσιάζει οριζόντια εφαπτομένη για $x=1$ να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός a .
 3. Για $a=1$:
 - i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
 - ii) Να αποδείξετε ότι $1 \leq g(1) < 7$
 - iii) Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g παρουσιάζουν μοναδικό σημείο τομής στο $[1,5)$

(6+4+3x5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4^ο



Δίνεται η 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = e$ και $f(x) \neq 0$.

Αν ισχύουν:

- $x^2 \cdot f''(x) + f'(x) = 2f(x)$
 - $\int_e^{f'(1)} (x - \ln x) dx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{7x}(x^2 + 7)}{x}$ τότε:
1. Να αποδειχθεί ότι $f'(1) = e$ και να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $x=1$.
 2. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 \cdot f'(x) - (2x-1) \cdot f(x)$ με $x > 0$ είναι σταθερή
 3. Να αποδειχθεί ότι $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$
 4. Να μελετηθεί η $f(x)$ ως προς μονοτονία και κυρτότητα και να βρεθούν ακρότατα και σημεία καμπής (αν υπάρχουν).
 5. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\frac{\int_1^7 x(xe^{\frac{1}{x}} - e) dx}{x-1} + \frac{4f(x - \ln x) - e^2}{x-2} = 0$ παρουσιάζει ακριβώς μια ρίζα στο $(1,2)$.

(5x5 μονάδες)

...ΕΥΧΟΜΕΘΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑ...

